

MATEMATICKÝ MODEL KROKOVÉHO MOTORU S AXIÁLNÍM PERMANENTNÍM MAGNETEM

P. KŘEMEN, S. NAVRÁTIL*

V článku se odvozuje matematický model dvoufázového krokového motoru s válcovým axiálním permanentním magnetem na rotoru, se dvěma statory a čtyřmi efektivními póly. Odvozuje se průběh magnetické vodivosti ve vzduchové mezeře a odpovídající náhradní schéma magnetického obvodu stroje. Ze změny magnetické energie se získává výraz pro elektromagnetický moment stroje. Dále se odvozují výrazy pro fázová magnetická sprázení a fázová indukovaná napětí. Odvozené vztahy se experimentálně ověřují na zkušebním stroji. Závěrem se získané výrazy upravují Parkovou transformací do dvouosé soustavy a získávají se rovnice obdobné rovnicím synchronního motoru, pomocí nichž se pak analyzují přechodové jevy. Uvádějí se výsledky pro zkoumaný stroj, napájený dvoufázovou čtyřtaktí komutací, a to: časový průběh proudu, rotorového úhlu a otáček při nízkém (10 Hz) a vysokém (200 Hz) krokovacím kmitočtu.

1. Definice základních pojmů

Při axiálním umístění permanentního magnetu má krokový motor dva statory a dva rotory (obr. 1). Stator má vyniklé póly vzdálené na obvodu o τ_p (obr. 2). Na pólech jsou navinuty cívky, které jsou vinuty přes oba statory, přední stator i zadní stator. Předním statorem rozumíme stator na straně spojky a zátěže. Na oblině pólových nástavců jsou zuby a drážky a rovněž povrch rotoru je drážkován [3].

Drážkování statoru a rotoru eventuálně i s počtem cívek statoru musí splnit následující podmínku: magnetická vodivost prostoru vzduchové mezery pod jednotlivými pólovými nástavci se musí lišit tak, aby otočením rotoru o čtvrtinu zubové rozteče se přesunulo pásmo s maximální magnetickou vodivostí pod následující pólový nástavec.

Existuje několik způsobů, jak tento požadavek splnit. Nejjednoduší způsob, který budeme předpokládat v této práci, spočívá na odlišné volbě počtu statorových a rotorových zubů s doplňující podmínkou celistvého počtu statorových zubů připadajících na jednu rozteč pólu. Typickým příkladem je 48 zubů na obvodu statoru, 50 zubů na obvodu rotoru a 8 cívek s pólovými nástavci na statoru. Pak

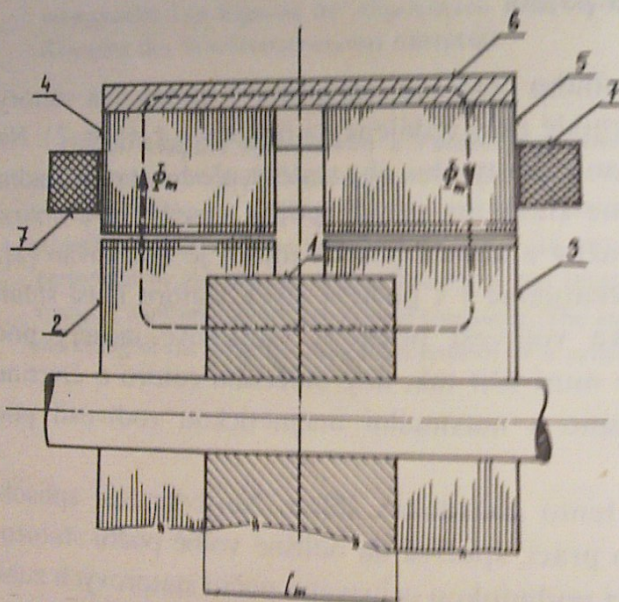
* Ing. Pavel Křemen, CSc., Ing. Stanislav Navrátil, CSc., Výzkumný ústav silnoproudé elektrotechniky.
250 97 Praha 9—Běchovice.

připadá na jednu rozteč cívek 6 drážkových roztečí, z nichž je na pólovém nastavci realizováno 4 1/2 drážkových roztečí (5 zubů a 4 drážky) a prostor mezi pólovými nastavci vznikl vynecháním 1 zubu a 2 drážek.

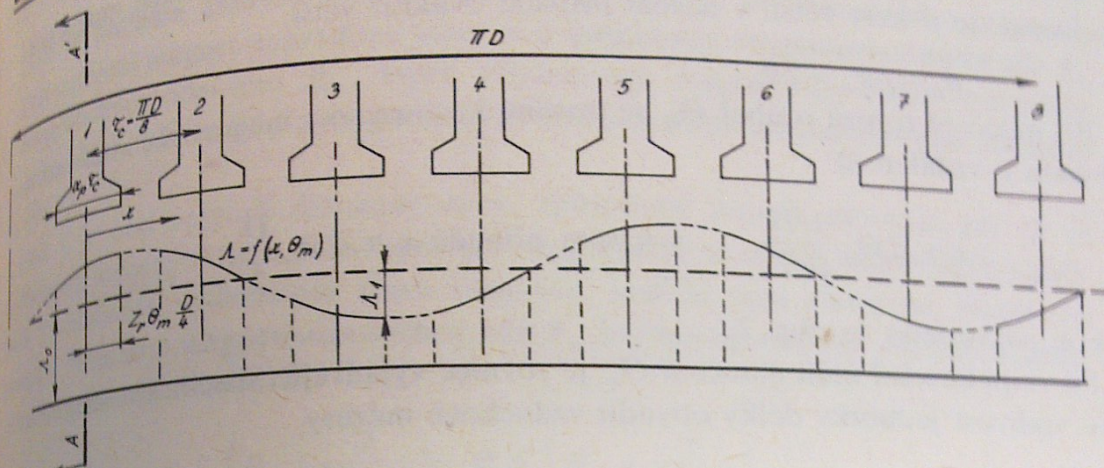
Popsaný případ je jednoduchý pro matematickou reprezentaci specifické magnetické vodivosti statoru jedné drážkové rozteče. Protože pólové nastavce vznikly vyříznutím 1 zubu a 2 drážek z jinak pravidelného dělení obvodu statoru, lze průběh dílčí specifické magnetické vodivosti vyjádřit souvislou křivkou, o níž můžeme s dobrou přesností předpokládat, že je to součet konstantní složky λ_0 a kosínové funkce s amplitudou λ_1 (obr. 2). Hodnoty λ_0 a λ_1 pro různé tvary drážek lze určit výpočtem magnetického pole a jsou publikovány v [2].

Protože počet zubů statoru a rotoru je dělitelný dvěma, opakuje se dle obr. 2 na obvodu vzduchové mezery dvakrát situace, kdy magnetická vodivost je maximální a dvakrát, kdy je minimální.

Budeme-li považovat maximum magnetické vodivosti za ekvivalentní kladnému magnetickému pólu a minimum vodivosti za ekvivalentní zápornému pólu, má stroj na obr. 2 dvě pólové dvojice. Je zřejmé, že počet pólových nastavců na statoru není rozhodující pro počet pólů z hlediska průběhu magnetického pole ve vzduchové mezeře. Skutečnost, že pólových nastavců je dvojnásobný počet než počet pólů z hlediska průběhu magnetických veličin, souvisí s počtem fází. V popisovaném případě měl stroj dvě fáze.



Obr. 1. Podélný řez krokovým motorem s axiálním permanentním magnetem. Řez je veden osou cívek a je označen na obr. 2 písmeny A — A. 1 — permanentní magnet ze slitiny železa, hliníku niklu, kobaltu, mědi a dalších prvků, 2 a 3 — přední a zadní rotor, 4 a 5 — přední a zadní stator (statory a rotory jsou složeny z dynamových plechů o obvyklých ztrátových číslech), 6 — masivní plášť z ocelové trubky, spojující oba statory, 7 — vinutí. Rotory jsou navzájem natočeny o polovinu drážkové rozteče, což je zřejmé z odlišné viditelnosti obou drážek v řezu.



Obr. 2. Ideální průběh specifické magnetické vodivosti jedné drážkové rozteče pro určitou polohu rotoru (neplatí v úsecích s přerušovanou linií).

Goniometrická funkce pro λ , vyjadřující na obr. 2 prostorový průběh specifické magnetické vodivosti prostoru jedné zubové rozteče, je mezi pólovými nastavci čárkována, čímž je naznačeno, že v této části neplatí.

Stručně se ještě zmíníme, že existují jiná uspořádání, kde tento průběh specifické magnetické vodivosti není hladká křivka. Postup matematické reprezentace je obdobný, ale je třeba ho rozepsat pro každou rozteč τ_c osobitně.

2. Matematický model magnetického obvodu

K vyjádření elektromagnetických poměrů je třeba zavést několik veličin:

x — délková souřadnice obvodu statoru měřená od osy zvolené cívky č. 1,

ϑ_m — úhel v radiánech, odpovídající obvodovému oblouku délky x ,

Θ_m — skutečný (mechanický) úhel natočení zvoleného zubu rotoru vůči ose zvolené cívky,

p — počet pólových dvojic, daných počtem vln první harmonické průběhu specifické magnetické vodivosti.

Úhly ϑ_m a Θ_m převedeme na úhly elektrické a s jejich pomocí vyjádříme závislost magnetické vodivosti vzduchové mezery.

Protože natočení rotoru o jednu zubovou rozteč znamená změnu magnetické vodivosti na libovolném místě obvodu vzduchové mezery v rozsahu jedné periody, převedeme úhel Θ_m na elektrický úhel vynásobením počtem zubů rotoru Z_r .

Úhel ϑ_m je úměrný obvodové délce x vztahem

$$\vartheta_m = \frac{2}{D} x.$$

Elektrický úhel, který dosadíme do argumentu kosinové funkce magnetické vodivosti, je p -krát větší, v našem případě dvakrát větší

$$\vartheta_{el} = p\vartheta_m = 2\vartheta_m.$$

Při natočení rotoru o úhel Θ_m se posune kosinusovka magnetické vodivosti na obvodu o vzdálenost

$$x = Z_r \Theta_m \frac{1}{p} \frac{D}{2}, \quad \text{v našem případě } x = Z_r \Theta_m \frac{D}{4},$$

jak je nakresleno na obr. 2.

Při respektování úhlu natočení Θ_m je rovnice vyjadřující specifickou magnetickou vodivost jednotky délky obvodu vzduchové mezery

$$\Lambda(\vartheta_{el}, \Theta_m) = \left[\Lambda_0 \pm \Lambda_1 \cos(\vartheta_{el} - Z_r \Theta_m) \right] \frac{1}{\tau_d} \quad \left. \vphantom{\Lambda(\vartheta_{el}, \Theta_m)} \right\} \\ \Lambda(x, \Theta_m) = \left[\Lambda_0 \pm \Lambda_1 \cos\left(\frac{4}{D} x - Z_r \Theta_m\right) \right] \frac{1}{\tau_d} \quad \left. \vphantom{\Lambda(x, \Theta_m)} \right\} \quad (1)$$

Vydělením drážkovou roztečí τ_d převedeme údaje Λ_0 a Λ_1 vztažené na drážkovou rozteč na délkovou jednotku obvodu vzduchové mezery.

Záporné znaménko platí pro zadní stator a je způsobeno tím, že plechy zadního rotoru jsou natočeny vůči přednímu rotoru o polovinu zubové rozteče. Λ , Λ_0 , Λ_1 jsou vztaženy na celou osovou délku jednoho statoru. Vypočteme nyní magnetickou vodivost pod celým pólovým nástavcem o šířce $\alpha_p \tau_c$, a to jako integrál magnetické vodivosti (1) po délce $\alpha_p \tau_c$. α_p je poměrné zkrácení pólového nástavce oproti rozteči os cívek τ_c , takže součin $\alpha_p \tau_c$ je délka oblouku pólového nástavce. Výpočet provedeme pro libovolný pólový nástavec n , které jsou v našem případě navzájem natočeny o úhel $\frac{2\pi}{8}$ radiánů mechanických, nebo-li o $\frac{2\pi}{8} p = \frac{\pi}{2}$ radiánů elektrických

$$\Lambda_p(n) = \int_{-\frac{\alpha_p \tau_c}{2}}^{\frac{\alpha_p \tau_c}{2}} \frac{1}{\tau_d} \left[\Lambda_0 \pm \Lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} n + \frac{4}{D} x - Z_r \Theta_m\right) \right] dx = \\ = \frac{\Lambda_0}{\tau_d} \alpha_p \tau_c \pm \frac{\Lambda_1 D}{\tau_d} \frac{2}{2} \sin \frac{2\alpha_p \tau_c}{D} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} n - Z_r \Theta_m\right).$$

Zavedeme pomocné výrazy Λ_{p0} a Λ_{p1} :

$$\Lambda_{p0} = \frac{\Lambda_0}{\tau_d} \alpha_p \tau_c, \quad \Lambda_{p1} = \frac{\Lambda_1 D}{\tau_d} \sin \frac{2\alpha_p \tau_c}{D}, \\ \Lambda_p(n) = \Lambda_{p0} \pm \Lambda_{p1} \cos\left(\frac{\pi}{2} n - Z_r \Theta_m\right). \quad (2)$$

Dále se budeme zabývat matematickou reprezentací permanentního magnetu. Permanentní magnet nahradíme vinutím o konstantní magnetomotorické síle F_m a magnetickým odporem R_m , který představuje magnetický odpor materiálu magnetu. Náhrada vychází z magnetických charakteristik permanentního magnetu na obr. 3.

Bod 1 je bod nejvyšší demagnetizace, způsobené jednak montáží, při níž je vzduchová mezera větší, a dále zápornou magnetizací se strany satorových vinutí. Bod 2 odpovídá výslednému stavu magnetu, jestliže jsou satorová vinutí bez proudu. Náhradní magnetomotorickou sílu F_m určíme na základě znalosti magnetické indukce B_0 v bodě 2

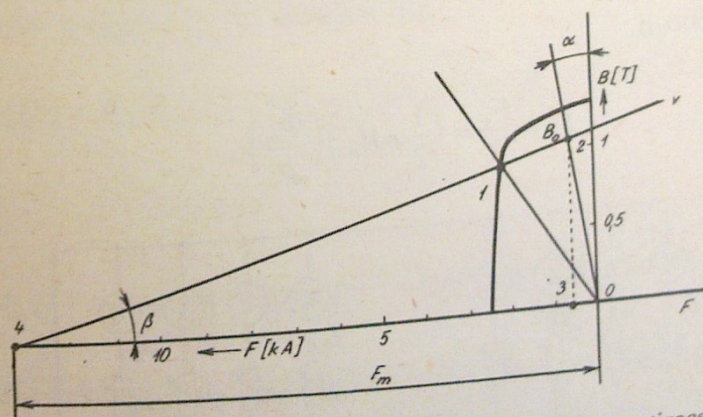
$$F_m = B_0 S_m \left(R_m + \frac{2}{p 4 \Lambda_{p0}} \right) = B_0 S_m \left(R_m + \frac{1}{p 2 \Lambda_{p0}} \right). \quad (3)$$

Vztah platí pro dvoufázový stroj se dvěma nástavci a cívkami na jednu fázi. Ve jmenovateli je ještě počet pólových dvojic p , v čitateli je dvojka, která znamená dva přechody přes vzduchovou mezeru: v předním a zadním satoru. Magnetický odpor permanentního magnetu je

$$R_m = \frac{l_m}{\mu_v S_m}, \quad (4)$$

kde μ_v je vratná permeabilita, definovaná směrnici přímky na obr. 3.

Magnetický odpor dynamových plechů a ocelové trubky (části 2, 3, 4, 5 a 6 na obr. 1) zanedbáme stejně jako účinky hysteréze a vířivých proudů.



Obr. 3. Náhradní magnetomotorická síla permanentního magnetu. 1 — bod největší demagnetizace, 2 — magnet. indukce, jsou-li vinutí bez proudu, 30 — magnetické napětí na vzduchové mezeře, 43 — magnetické napětí na úseku siločáry v permanentním magnetu. Tangenta úhlu α je úměrná magnetickému odporu vzduchové mezery, $\tan \beta = \frac{\mu_v}{l_m}$. Graf je kreslen pro $\mu_v = 3,333 \cdot 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}$ a pro $l_v = 0,04 \text{ m}$.

3. Analýza magnetických toků

Na základě uvedeného popisu lze nakreslit náhradní schéma magnetických obvodů dvoufázového krokového motoru. Na obr. 4 je toto schéma nakresleno pro jednu pólovou dvojici, proto se jako odpor permanentního magnetu dosazuje hodnota pR_m a tok počítaný ve schématu je p -krát menší než skutečný tok.

Vzhledem k tomu, že se v předním a zadním statoru opakují stejná uskupení F a Λ_p , i když vždy s opačným znaménkem, musí platit rovnost magnetických napětí F_0 na předním i zadním bloku (obr. 4).

Tuto úvahu doplníme rozpisem magnetických vodivostí pod nástavci cívek (1) až (4), platícím pro přední stator

$$\begin{aligned}\Lambda_p(1) &= \Lambda_{p0} + \Lambda_{p1} \cos Z_r \Theta_m, \\ \Lambda_p(2) &= \Lambda_{p0} + \Lambda_{p1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - Z_r \Theta_m\right) = \Lambda_{p0} + \Lambda_{p1} \sin Z_r \Theta_m, \\ \Lambda_p(3) &= \Lambda_{p0} + \Lambda_{p1} \cos(\pi - Z_r \Theta_m) = \Lambda_{p0} - \Lambda_{p1} \cos Z_r \Theta_m, \\ \Lambda_p(4) &= \Lambda_{p0} + \Lambda_{p1} \cos\left(3\frac{\pi}{2} - Z_r \Theta_m\right) = \Lambda_{p0} - \Lambda_{p1} \sin Z_r \Theta_m.\end{aligned}\quad (5)$$

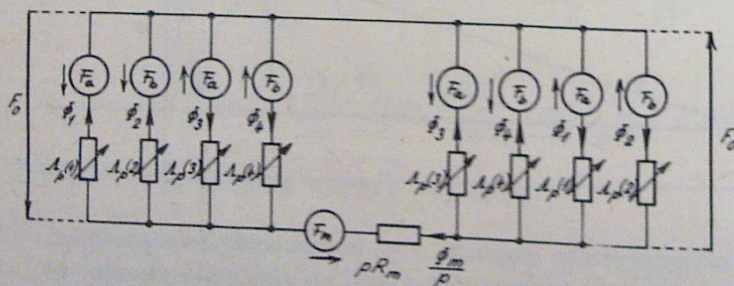
Protože rotor v zadním bloku je posunut o polovinu zubové rozteče, tedy o π , je vodivost pod cívkou (1) v zadním bloku stejná jako vodivost pod cívkou (3) v předním bloku.

Útvar na obr. 4 lze popsat základní rovnicí

$$2F_0 + F_m = (pR_m) \left(\frac{\Phi_m}{p} \right)$$

nebo-li

$$F_0 + \frac{F_m}{2} = \left(\frac{1}{2} pR_m \right) \left(\frac{\Phi_m}{p} \right). \quad (6)$$



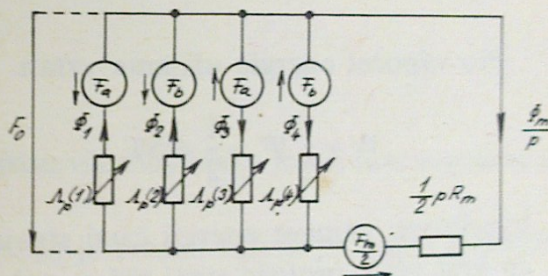
Obr. 4. Náhradní schéma magnetických obvodů čtyř pólových nástavců (polovina magnetického obvodu stroje) vytvořené odporovou sítí se zdroji napětí modelujícími magnetomotorické síly. Schéma platí pro okamžité hodnoty proudů a úhlu natočení rotoru.

Postačí tudíž řešit jen polovinu obr. 4, jestliže dosadíme poloviční náhradní magnetomotorickou sílu magnetu, to jest $\frac{F_m}{2}$ a poloviční hodnotu odporu pR_m , to jest $\frac{1}{2}pR_m$ (obr. 5).

Podle obr. 5 lze sestavit rovnice:

$$\begin{aligned} F_a - \frac{\Phi_1}{\Lambda_p(1)} &= F_0, & \Phi_1 &= (F_a - F_0)\Lambda_p(1), \\ F_b - \frac{\Phi_2}{\Lambda_p(2)} &= F_0, & \Phi_2 &= (F_b - F_0)\Lambda_p(2), \\ -F_a + \frac{\Phi_3}{\Lambda_p(3)} &= F_0, & \Phi_3 &= (F_0 + F_a)\Lambda_p(3), \\ -F_b + \frac{\Phi_4}{\Lambda_p(4)} &= F_0, & \Phi_4 &= (F_0 + F_b)\Lambda_p(4), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\Phi_m}{p} = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4. \quad (8)$$



Obr. 5. Zjednodušené náhradní schéma.

Řešením rovnic (6), (7) a (8) dostaneme nejprve pomocnou hodnotu magnetického napětí F_0 . Dosadíme proto vztahy (7) do rovnice (6)

$$\begin{aligned} F_0 + \frac{F_m}{2} &= \left(\frac{1}{2} p R_m\right) [(F_a - F_0)\Lambda_p(1) + (F_b - F_0)\Lambda_p(2) - (F_0 + F_a)\Lambda_p(3) - \\ &\quad - (F_0 + F_b)\Lambda_p(4)], \\ F_0 &= \frac{\left(\frac{1}{2} p R_m\right) \{F_a[\Lambda_p(1) - \Lambda_p(3)] + F_b[\Lambda_p(2) - \Lambda_p(4)]\} - \frac{F_m}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2} p R_m\right) [\Lambda_p(1) + \Lambda_p(2) + \Lambda_p(3) + \Lambda_p(4)]}. \end{aligned} \quad (9)$$

Po dosazení rovnic (5)

$$F_0 = \frac{p R_m \Lambda_{p1} (F_a \cos Z_r \Theta_m + F_b \sin Z_r \Theta_m) - \frac{F_m}{2}}{1 + 2 p R_m \Lambda_{p0}}. \quad (10)$$

Z rovnice (6) rovněž plyne:

$$\frac{\Phi_m}{p} = \frac{F_0 + \frac{F_m}{2}}{\frac{1}{2} p R_m},$$

$$\frac{\Phi_m}{p} = \frac{2}{1 + 2pR_m\Lambda_{p0}} [\Lambda_{p1}(F_a \cos Z_r\Theta_m + F_b \sin Z_r\Theta_m) + \Lambda_{p0}F_m].$$

Za použití rovnice (3) lze výraz upravit

$$\frac{\Phi_m}{p} = \frac{2}{1 + 2pR_m\lambda_{p0}} (F_a \cos Z_r\Theta_m + F_b \sin Z_r\Theta_m) + B_0 S_m \frac{1}{p} \quad (11)$$

Pro $R_m \rightarrow \infty$ zmizí složka toku Φ_m závislá na otáčení rotoru.

4. Magnetická energie a moment motoru

Pro výpočet energie uijeme vztah

$$W = \frac{1}{2} \Psi_i = \frac{1}{2} \Phi N i. \quad (12)$$

Vypočteme nejprve energii části stroje, odpovídající obr. 5. Celková energie je $2p$ -krát větší, protože stroj má p pólových dvojic a dva statory.

$$\begin{aligned} \frac{W}{2p} = & \frac{1}{2} [F_a(F_a - F_0)\Lambda_p(1) + F_b(F_b - F_0)\Lambda_p(2) + F_a(F_0 + F_a)\Lambda_p(3) + \\ & + F_b(F_0 + F_b)\Lambda_p(4) + \frac{F_m}{2} \frac{F_0 + \frac{F_m}{2}}{\frac{1}{2} p R_m}] \quad (13) \end{aligned}$$

Moment motoru:

$$M = \frac{\partial W}{\partial \Theta_m}.$$

Ve výrazu (13) zderivujeme podle Θ_m všechny magnetické vodivosti pólových nástavců a členy vhodně uspořádáme. Dostáváme:

$$M = p \left\{ F_a^2 \left(\frac{d\Lambda_p(1)}{d\Theta_m} + \frac{d\Lambda_p(3)}{d\Theta_m} \right) + F_b^2 \left(\frac{d\Lambda_p(2)}{d\Theta_m} + \frac{d\Lambda_p(4)}{d\Theta_m} \right) - \right.$$

$$-F_0 \left[F_a \left(\frac{d\lambda_p(1)}{d\Theta_m} - \frac{d\lambda_p(3)}{d\Theta_m} \right) + F_b \left(\frac{d\lambda_p(2)}{d\Theta_m} - \frac{d\lambda_p(4)}{d\Theta_m} \right) \right] - \frac{dF_0}{d\Theta_m} [F_a(\Lambda_p(1) - \Lambda_p(3)) + F_b(\Lambda_p(2) - \Lambda_p(4))] + \frac{F_m}{pR_m} \frac{dF_0}{d\Theta_m} \} \quad (14)$$

Po dosazení vztahů (5)

$$M = B_0 S_m \frac{\Lambda_{p1}}{\Lambda_{p0}} Z_r (-F_a \sin Z_r \Theta_m + F_b \cos Z_r \Theta_m) + \frac{2p^2 R_m \Lambda_{p1}^2 Z_r}{1 + 2p R_m \Lambda_{p0}} [(F_a^2 - F_b^2) \sin 2Z_r \Theta_m - 2F_a F_b \cos 2Z_r \Theta_m] \quad (15)$$

Z analýzy výrazu je zřejmé, že na velikost momentu má kromě statorových proudů vliv poměr vodivosti prostoru pod pólovým nástavcem $\Lambda_{p1}/\Lambda_{p0}$ a magnetická indukce naprázdno B_0 , vytvořená permanentním magnetem.

Ve druhé části výrazu (15) se B_0 nevyskytuje. Tato složka výrazu odpovídá momentu motorů s neaktivním rotorem. Početně lze ukázat, že její vliv je malý.

5. Indukované napětí

Při výpočtu budeme předpokládat, že jsou všechny cívky jedné fáze zapojeny do série.

Hlavní magnetický spřažený tok cívky (1) je tvořen tokem předního a zadního statoru. Podle rovnic (7) a obr. 4 dosadíme

$$\Psi_{hc} = N_c [(F_a - F_0)\Lambda_p(1) + (F_0 + F_a)\Lambda_p(3)].$$

Tok zadního statoru cívky (1) je dle obr. 4 totožný co do velikosti s tokem cívky (3) předního statoru, protože obě vodivosti jsou rovněž totožné. Liší se ovšem směrem toku. Obdobnou rovnici sestavíme pro cívku (3). Její tok je tvořen tokem Φ_3 předního statoru a tokem zadního statoru, který je totožný s tokem cívky (1) předního statoru, a to opět z důvodu shodnosti vodivosti pod cívkou (3) zadního statoru a cívkou (1) předního statoru. Zjišťujeme tudíž, že součet toků předního a zadního statoru spřažených s cívkou (3) je totožný s tokem spřaženým s cívkou (1). Můžeme proto pro tok spřažený s fází „a“, která vznikne seriovým zapojením obou cívek a všech pólových dvojic psát:

$$\Psi_{ha} = p2N_c \{ F_a [\Lambda_p(1) + \Lambda_p(3)] - F_0 [\Lambda_p(1) - \Lambda_p(3)] \} \quad (16)$$

Po dosazení rovnic (5):

$$\Psi_{ha} = p4N_c (F_a \Lambda_{p0} - F_0 \Lambda_{p1} \cos Z_r \Theta_m).$$

Dosadíme rovnice (4) a (10) a dále $F_a = N_c i_a$ a $F_b = N_c i_b$:

$$\begin{aligned} \psi_{ha} = & p(2N_c)^2 \frac{\Lambda_{p0} + 2pR_m(\Lambda_{p0}^2 - \frac{\Lambda_{p1}^2}{4})}{1 + 2pR_m\Lambda_{p0}} i_a + \\ & + N_c B_0 S_m \frac{\Lambda_{p1}}{\Lambda_{p0}} \cos Z_r \Theta_m - \\ & - \frac{2N_c^2 p^2 R_m \Lambda_{p1}^2}{1 + 2pR_m\Lambda_{p0}} (i_a \cos 2Z_r \Theta_m + i_b \sin 2Z_r \Theta_m). \end{aligned} \quad (17)$$

Zavedeme pomocné výrazy:

L_{h1} — hlavní indukčnost jedné fáze, nezávislá na poloze rotoru,

L_{h2} — maximální hodnota indukčnosti závislé na úhlu natočení rotoru,

K_n — otáčková konstanta.

$$L_{h1} = p(2N_c)^2 \frac{\Lambda_{p0} + 2pR_m(\Lambda_{p0}^2 - \frac{\Lambda_{p1}^2}{4})}{1 + 2pR_m\Lambda_{p0}}, \quad (18)$$

$$L_{h2} = \frac{p^2}{2} (2N_c)^2 \frac{R_m \Lambda_{p1}^2}{1 + 2pR_m\Lambda_{p0}}, \quad (19)$$

$$K_n = N_c B_0 S_m \frac{\Lambda_{p1}}{\Lambda_{p0}} Z_r. \quad (20)$$

Pro $R_m \rightarrow \infty$ lze rovnice (18) a (19) zjednodušit:

$$L_{h1} = p(2N_c)^2 \frac{\Lambda_{p0}^2 - \frac{\Lambda_{p1}^2}{4}}{\Lambda_{p0}}, \quad (21)$$

$$L_{h2} = \frac{p}{4} (2N_c)^2 \frac{\Lambda_{p1}^2}{\Lambda_{p0}}. \quad (22)$$

Obdobným způsobem odvodíme tok spřažený s fází „b“. Je tvořen podle obr. 4 dvojnásobnou hodnotou součtu toků Φ_2 a Φ_4 , násobenou počtem pólových dvojic p

$$\begin{aligned} \psi_{hb} = & p(2N_c)^2 \frac{\Lambda_{p0} + 2pR_m(\Lambda_{p0}^2 - \frac{\Lambda_{p1}^2}{4})}{1 + 2pR_m\Lambda_{p0}} i_a + \\ & + N_c B_0 S_m \frac{\Lambda_{p1}}{\Lambda_{p0}} \sin Z_r \Theta_m - \\ & - \frac{2N_c^2 p^2 R_m \Lambda_{p1}^2}{1 + 2pR_m\Lambda_{p0}} (i_a \sin 2Z_r \Theta_m - i_b \cos 2Z_r \Theta_m). \end{aligned} \quad (23)$$

Závěrečný tvar rovnic (17) a (23) je za použití pomocných výrazů (18), (19) a (20):

$$\begin{aligned}\psi_{ha} &= L_{h1} i_a + \frac{K_n}{Z_r} \cos Z_r \Theta_m - L_{h2} (i_a \cos 2Z_r \Theta_m + i_b \sin 2Z_r \Theta_m), \\ \psi_{hb} &= L_{h1} i_b + \frac{K_n}{Z_r} \sin Z_r \Theta_m - L_{h2} (i_a \sin 2Z_r \Theta_m - i_b \cos 2Z_r \Theta_m).\end{aligned}\quad (24)$$

Pomocí rovnic (24) lze po doplnění rozptylových toků spřažených s vinutím psát napěťové rovnice obou fází:

$$\begin{aligned}u_a &= (2pR_c) i_a + (L_{h1} + L_o) \frac{di_a}{dt} - K_n \frac{d\Theta_m}{dt} \sin Z_r \Theta_m - \\ &- L_{h2} \frac{di_a}{dt} \cos 2Z_r \Theta_m + L_{h2} 2Z_r i_a \frac{d\Theta_m}{dt} \sin 2Z_r \Theta_m - \\ &- L_{h2} \frac{di_b}{dt} \sin 2Z_r \Theta_m - L_{h2} 2Z_r i_b \frac{d\Theta_m}{dt} \cos 2Z_r \Theta_m.\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}u_b &= (2pR_c) i_b + (L_{h1} + L_o) \frac{di_b}{dt} + K_n \frac{d\Theta_m}{dt} \cos Z_r \Theta_m - \\ &- L_{h2} \frac{di_a}{dt} \sin 2Z_r \Theta_m - L_{h2} 2Z_r i_a \frac{d\Theta_m}{dt} \cos 2Z_r \Theta_m + \\ &+ L_{h2} \frac{di_b}{dt} \cos 2Z_r \Theta_m - L_{h2} 2Z_r i_b \frac{d\Theta_m}{dt} \sin 2Z_r \Theta_m.\end{aligned}$$

Na závěr porovnáme ještě konstantu K_n podle výrazu (20) s rovnicí pro moment (15). Je zřejmé, že konstanta K_n je současně momentovou konstantou závislosti momentu na jednoduché funkci úhlu $Z_r \Theta_m$.

Rozborem výrazů (18) a (19) plyne, že indukčnost L_{h2} je důsledkem nenulové hodnoty magnetického odporu materiálu permanentního magnetu. Pro $R_m = 0$ je hodnota $L_{h2} = 0$.

Avšak i pro druhý extrém, $R_m \rightarrow \infty$, je hodnota L_{h2} oproti L_{h1} nízká. Plyne to porovnáním výrazů (21) a (22). Ve výrazu (22) je ve jmenovateli čtyřka a čítec Λ_{p1} je přibližně $4 \times$ menší než $\Lambda_{p0}^2 - \frac{\Lambda_{p1}^2}{4}$ ve výrazu (21). Je tedy L_{h2} asi $16 \times$ menší než L_{h1} .

Odvozené vztahy byly ověřeny na prototypu krokového motoru s následujícími rozměry:

Permanentní magnet: $S_m = 1,632 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$; $l_m = 0,04 \text{ m}$; použitý materiál METAZ OK 7070 má hodnotu remanentní magnetické indukce 1,3 T, takže po montáži, při níž dojde k částečné demagnetizaci, bude hodnota B_0 asi 1 T.

Rotor: $D = 0,068$ m; $l = 0,035$ m (délka 1 rotoru); $Z_r = 50$. Stator a pólový nástavec: $D_s = 0,0683$ m; $\tau_c = 0,02682$ m; $\alpha_p \tau_c = 0,02272$ m; $\tau_d = 0,0042$ m. Počet závitů jedné cívky: $N_c = 20$.

Z křivek v literatuře (2) odečteme pro zvolenou šířku drážky a zubu hodnoty Λ_0 a Λ_1 vztažené na jednu drážkovou rozteč a 1 cm osové délky:

$$\frac{\Lambda_0}{l} = 10,8 \cdot 10^{-8} \text{ H/cm}, \quad \frac{\Lambda_1}{l} = 4,77 \cdot 10^{-8} \text{ H/cm}.$$

Vypočteme dle vztahů (2) a (4):

$$\Lambda_{p0} = 2,0448 \cdot 10^{-6} \text{ H}, \quad \Lambda_{p1} = 8,3739 \cdot 10^{-7} \text{ H}, \\ R_m = 7,35294 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} (\mu_v = 3,3333 \cdot 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}).$$

Otáčková konstanta dle rovnice (20) je:

$$K_n = 0,6683357 \text{ Wb},$$

L_{h1} a L_{h2} dle vzorců (18) a (19),

$$L_{h1} = 0,627355 \cdot 10^{-2} \text{ H}, \quad L_{h2} = 2,6985646 \cdot 10^{-4} \text{ H},$$

L_{h1} a L_{h2} dle zjednodušených vzorců (21) a (22):

$$L_{h1} = 0,626901 \cdot 10^{-2} \text{ H}, \quad L_{h2} = 2,74345 \cdot 10^{-4} \text{ H}.$$

Hodnoty indukčností byly ověřeny měřením na stojícím stroji při napájení jedné fáze napětím o kmitočtu 50 Hz a při rozpojené druhé fázi.

Dosazením do (25) $\frac{d\Theta_m}{dt} = 0$ a nalezením polohy rotoru s minimálním a s maximálním proudem i_a lze z naměřených hodnot určit:

$$L_{h1} + L_o = 0,7506 \cdot 10^{-2} \text{ H}, \quad L_{h2} = 5,05 \cdot 10^{-4} \text{ H}.$$

Shoda s vypočtenou hodnotou je v případě L_{h1} velmi dobrá, v případě L_{h2} jde o určitý rozdíl hodnot, avšak měření této indukčnosti je nepřesné, protože ji počítáme z rozdílu dvou velkých hodnot a tudíž lze předpokládat, že se uplatní silné chyby měření.

Konstanta K_n byla ověřena tak, že rotor krokového motoru byl otáčen stejnosměrným přídavným motorem a bylo měřeno indukované fázové napětí na rozpojených vinutích. Naměřeno bylo napětí 20,5 V (amplituda) při kmitočtu $f_c = 200$ Hz. Tomuto kmitočtu elektrickému odpovídá krokovací kmitočet $f_k = 800$ Hz, nebo-li $\frac{d\Theta_m}{dt} = 25,13274 \text{ rad./s}$. Dle rovnice (25) je $U_m = 16,797107 \text{ V}$. Vypočtená hodnota ukazuje na chybu v odhadu magnetické indukce B_0 , která byla patrně stanovena příliš nízkou, což potvrzuje i výpočet momentu.

Hodnoty momentu byly ověřeny pro proud $i_a = i_b = 2 \text{ A}$.

Dle rovnice (15) stanovíme:

$$M = 1,3366714 (-\sin 50 \Theta_m + \cos 50 \Theta_m) - 2,7102985 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 100 \Theta_m.$$

Maximální hodnota tohoto výrazu je 1,89 Nm, naměřeno bylo 2,15 Nm.

Ověřené hodnoty ukazují, že navržený výpočetní postup umožní získat při návrhu krokového motoru poměrně přesné údaje o jeho parametrech.

6. Transformace rovnic do os d, q

Lineární Parkova transformace d, q odstraní periodické koeficienty v rovnicích (25). Transformujeme pomocí vztahů:

$$\begin{aligned}\xi_d &= k_d \left[\xi_a \cos Z_r \Theta_m + \xi_b \cos \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \xi_q &= -k_q \left[\xi_a \sin Z_r \Theta_m + \xi_b \sin \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) \right].\end{aligned}\quad (26)$$

Zpětnou transformaci provádíme podle vzorců:

$$\begin{aligned}\xi_a &= \frac{1}{k_d} \xi_d \cos Z_r \Theta_m - \frac{1}{k_q} \xi_q \sin Z_r \Theta_m, \\ \xi_b &= \frac{1}{k_d} \xi_d \sin Z_r \Theta_m + \frac{1}{k_q} \xi_q \cos Z_r \Theta_m.\end{aligned}\quad (27)$$

Transformujeme nejprve vztahy (24), přičemž doplníme rozptylový tok:

$$\begin{aligned}\Psi_d &= k_d \left\{ (L_{h1} + L_\sigma) i_a \cos Z_r \Theta_m + \frac{K_n}{Z_r} \cos^2 Z_r \Theta_m - \right. \\ &\quad - L_{h2} (i_a \cos 2Z_r \Theta_m \cdot \cos Z_r \Theta_m + i_b \sin 2Z_r \Theta_m \cdot \cos Z_r \Theta_m) + \\ &\quad + (L_{h1} + L_\sigma) i_b \cos \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{K_n}{Z_r} \sin Z_r \Theta_m \cdot \cos \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) - \\ &\quad - L_{h2} \left[i_a \sin 2Z_r \Theta_m \cdot \cos \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - i_b \cos 2Z_r \Theta_m \cdot \cos \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}, \\ \Psi_d &= k_d \left[(L_{h1} + L_\sigma - L_{h2}) i_d + \frac{K_n}{Z_r} \right].\end{aligned}\quad (28)$$

Podobně:

$$\begin{aligned}\Psi_q &= -k_q \left\{ (L_{h1} + L_\sigma) \sin Z_r \Theta_m + \frac{K_n}{Z_r} \cos Z_r \Theta_m \cdot \sin Z_r \Theta_m - \right. \\ &\quad - L_{h2} [i_a \cos 2Z_r \Theta_m \cdot \sin Z_r \Theta_m + i_b \sin 2Z_r \Theta_m \cdot \sin Z_r \Theta_m] + \\ &\quad + (L_{h1} + L_\sigma) i_b \sin \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{K_n}{Z_r} \sin Z_r \Theta_m \cdot \sin \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) - \\ &\quad - L_{h2} \left[i_a \sin 2Z_r \Theta_m \cdot \sin \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - i_b \cos 2Z_r \Theta_m \cdot \sin \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}.\end{aligned}$$

$$-i_b \cos 2Z_r \Theta_m \cdot \sin \left(Z_r \Theta_m - \frac{\pi}{2} \right) \Bigg] \Bigg\},$$

$$\Psi_q = k_q (L_{h1} + L_\sigma + L_{h2}) i_q.$$

(29)

Konstanty k_d a k_q zvolíme rovné jedné a zavedeme obdobně jako u synchronních strojů

$$L_d = L_{h1} - L_{h2} + L_\sigma,$$

(30)

$$L_q = L_{h1} + L_{h2} + L_\sigma.$$

(31)

V případě krokového motoru je $L_d < L_q$. Tato odchylka od teorie synchronního stroje je způsobena tím, že v podélné ose je maximální spřažený tok permanentního magnetu s určitou cívkou tehdy, je-li vodivost vzduchové mezery v jednom statoru maximální. Z hlediska vlastního proudu v cívce je však její indukčnost největší, je-li úhel natočení rotoru vůči ose cívky roven $\frac{1}{4}$ zubové rozteče, to jest 90° , což je

právě osa q .

Pro fázová napětí můžeme psát rovnice:

$$u_a (2pR_c) i_a + \frac{d\Psi_a}{dt}.$$

Za Ψ_a dosadíme pro $k_d = k_q = 1$ zpětnou transformaci:

$$\Psi_a = \Psi_d \cos Z_r \Theta_m - \Psi_q \sin Z_r \Theta_m.$$

Podobně za u_a píšeme:

$$\begin{aligned} u_d \cos Z_r \Theta_m - u_q \sin Z_r \Theta_m &= 2pR_c (i_d \cos Z_r \Theta_m - i_q \sin Z_r \Theta_m) + \\ &+ \frac{d\Psi_d}{dt} \cos Z_r \Theta_m - \Psi_d Z_r \frac{d\Theta_m}{dt} \sin Z_r \Theta_m - \frac{d\Psi_q}{dt} \sin Z_r \Theta_m - \\ &- \Psi_q Z_r \frac{d\Theta_m}{dt} \cos Z_r \Theta_m. \end{aligned}$$

Porovnání koeficientů u $\cos Z_r \Theta_m$ a $\sin Z_r \Theta_m$ dostaneme dvě rovnice pro složky napětí:

$$u_d = 2pR_c i_d - \frac{d\Psi_d}{dt} - \Psi_q Z_r \frac{d\Theta_m}{dt},$$

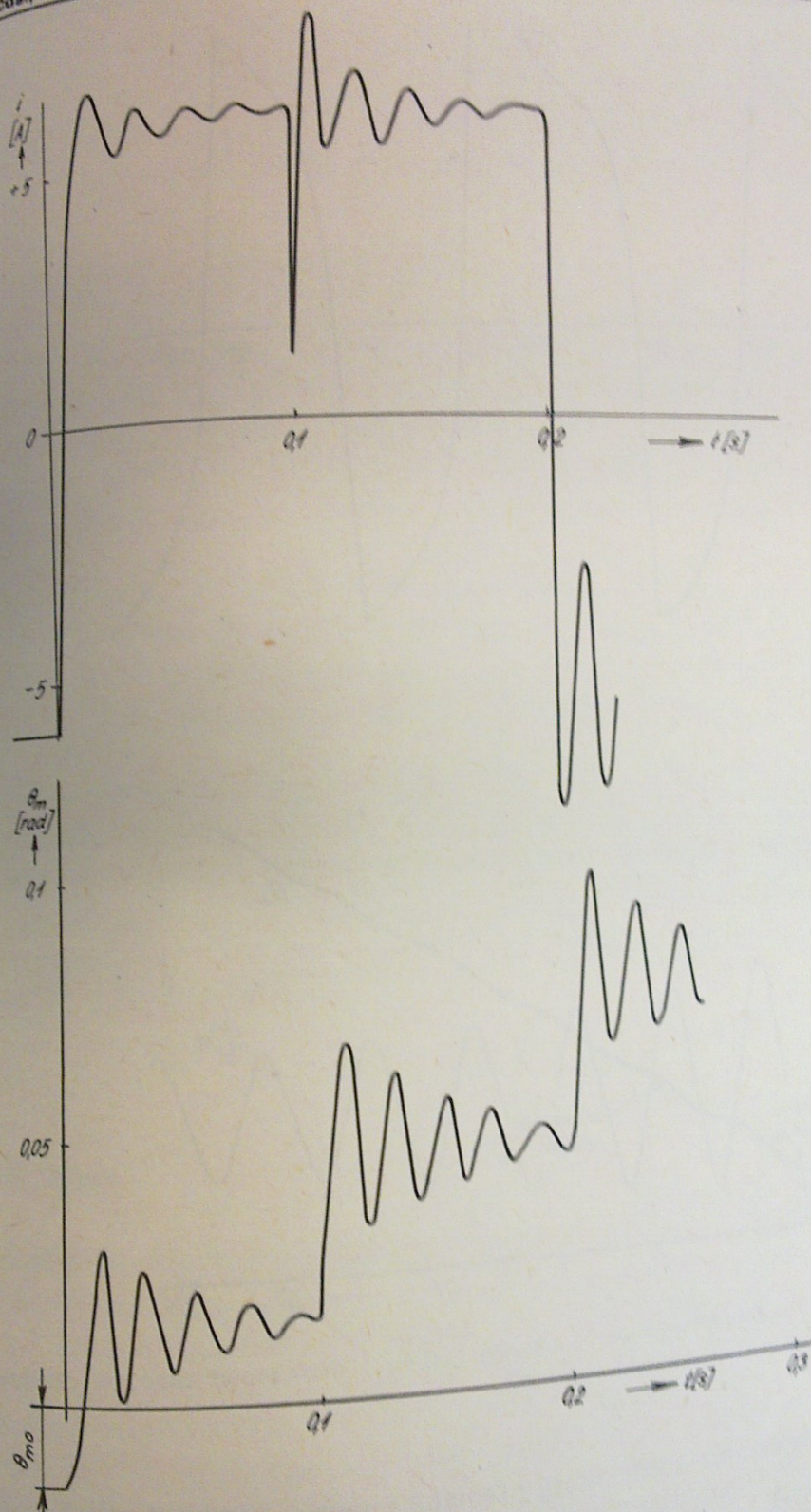
$$u_q = 2pR_c i_q + \frac{d\Psi_q}{dt} + \Psi_d Z_r \frac{d\Theta_m}{dt}.$$

(32)

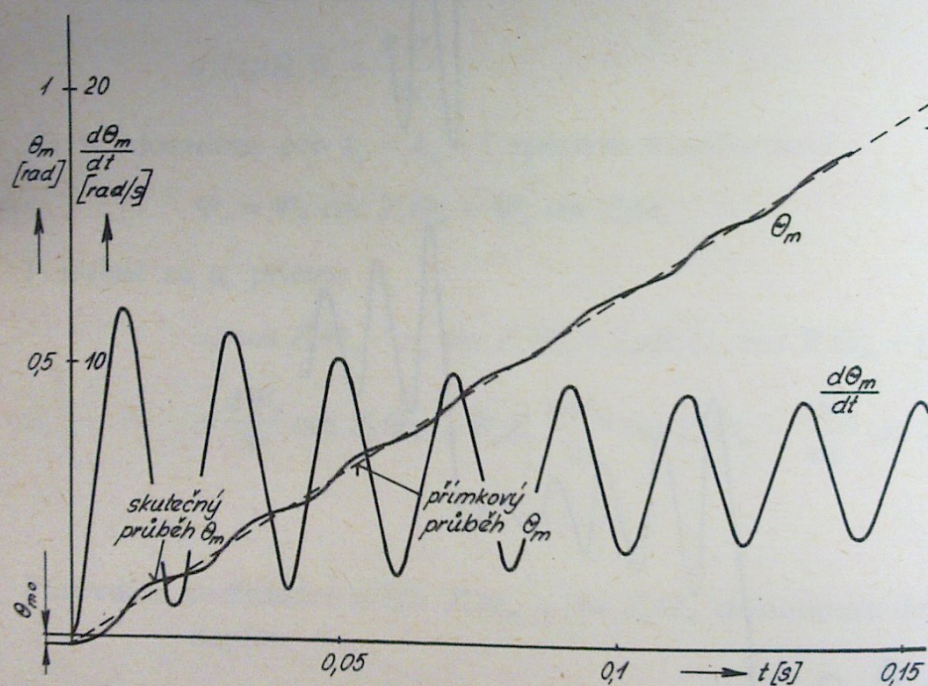
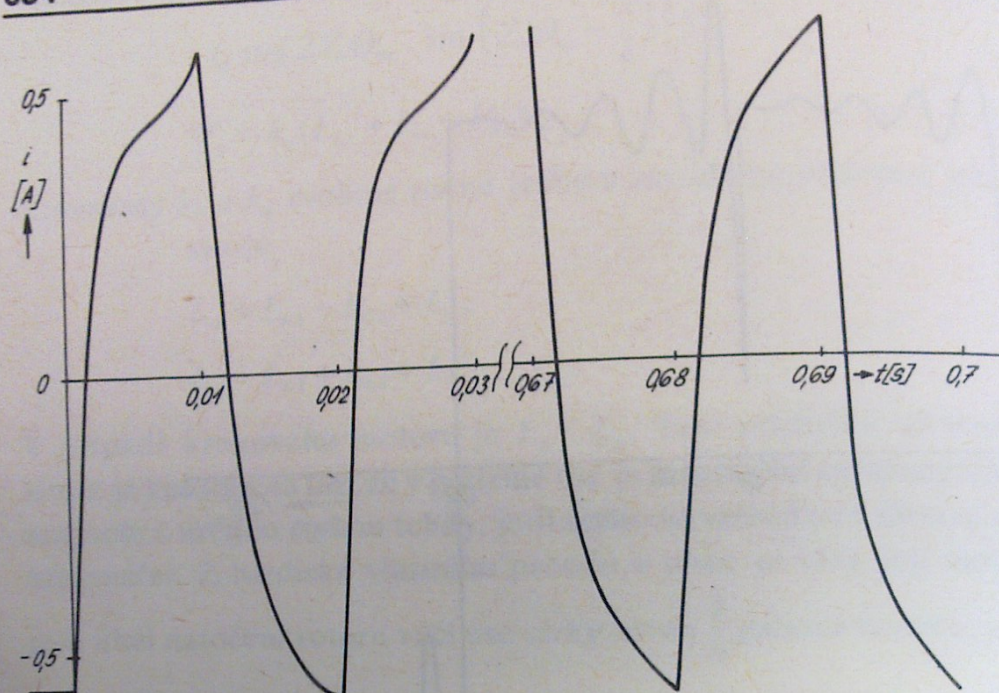
Ve výrazu (15) pro moment uijeme rovněž složky d , q proudů i_a a i_b . Dosadíme současně výrazy (19), (20), (27), (28) a (29):

(33)

$$M = K_n i_q - 2L_{h2} Z_r i_d i_q = Z_r (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d).$$



Obr. 6. Modelování přechodných jevů při nízkém krokovacím kmitočtu (10,14 Hz). Nahoře průběh proudu jedné fáze, dole průběh úhlu natočení rotoru.



Obr. 7. Rozběh motoru při krokovacím kmitočtu 200 Hz. Nahoře proud jedné fáze, dole průběh úhlu natočení rotoru a mechanické úhlové rychlosti.

Pohybová rovnice pro rotor, který přemáhá moment zátěže M_z , zní:

$$J \frac{d^2 \Theta_m}{dt^2} + M_z = Z_r (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d). \quad (34)$$

Soustava rovnic (28), (29), (32) a (34) popisuje tudíž všechny elektromechanické

jevy krokového motoru. Srovnáme-li uvedené rovnice s rovnicemi pro synchronní stroj v práci Měřičky a Zoubka (1), zjistíme naprostý souhlas s jedinými odchylkami, spočívajícími v užití Z_r místo p v (33) a $Z_r \frac{d\Theta_m}{dt}$ místo ω v (32).

7. Modelování přechodných jevů

Uvedený krokový motor je nejčastěji napájen systémem dvoufázových o čtvrtinu periody posunutých obdélníkových pulzů, kterýžto způsob nazýváme čtyřtaktní dvoufázovou komutací. Pulzy jsou dvojí polarity. V některých případech se užívají pulzy pouze jedné polarity a záporná magnetomotorická síla se vytváří obráceně zapojeným bifilárním vinutím. Při modelování lze však poměry zjednodušit na první případ.

Podélnou a příčnou složku napětí modelujeme pomocí (26), kde u_a a u_b je buď $+U$ nebo $-U$. Znaménko se určuje znaménkem pomocných funkcí $\sin \omega_c t$ a $\cos \omega_c t$, kde ω_c je napájecí úhlový kmitočet. Z teorie krokových motorů (2) je známo, že napájecí kmitočet je při čtyřtaktní dvoufázové komutaci roven čtvrtině krokovacího kmitočtu.

Na obr. 6 a 7 uvádíme dvě ukázky modelovaných přechodných jevů. Na obr. 6 je rozběh motoru při krokovacím kmitočtu 10, 14 Hz, kdy motor vykonává jednotlivé kroky, a na obr. 7 je rozběh při krokovacím kmitočtu 200 Hz, kdy kroky rotoru splývají v plynulý pohyb. Zvlnění průběhu proudu na obr. 6 a nesymetrie proudu na obr. 7 jsou způsobeny kolísáním otáček. Při ustálených otáčkách na obr. 7 je už proud symetrický v obou polaritách.

8. Závěr

V předložené práci jsme vyšli z geometrického uspořádání stroje a odvodili jsme výrazy pro magnetické toky, indukčnosti a napětí krokového motoru s axiálním permanentním magnetem. Odvozené výrazy umožňují modelování krokového motoru již během návrhu, kdy ještě nejsou k dispozici měřené údaje. Porovnáním srovnáním synchronního stroje v Parkově transformaci docházíme k závěru, že soustava rovnic krokového motoru s axiálním permanentním magnetem a dvěma statory odvozená pro diskrétní nesinusové rozložené vinutí je obdobná rovnicím synchronního stroje. Odvození je podstatně jednodušší než při náhradě diskrétního vinutí ekvivalentním sinusově rozloženým [3].

Lektor: J. Čemus

Rukopis dodaný 14. 2. 1977

LITERATURA

- [1] MĚŘIČKA J.—ZOUBEK, Z.: Teorie obecného elektrického stroje II. Elektrotechn. Obz., 57, 1968, č. 11—12. — [2] ČILIKIN a kol.: Diskretnýj elektroprivod s šagovými dvigateljami. Moskva, Energija 1971. — [3] KŘEMEN, P.—NAVRÁTIL, S.: Základní vlastnosti krokového motoru s axiálně umístěným permanentním magnetem. Elektrotechn. Obz., 64, 1975, č. 7.

Математическая модель шагового двигателя с осевым постоянным магнитом. В статье выводится математическая модель двухфазного шагового двигателя с цилиндрическим постоянным магнитом на роторе, с двумя статорами и четырьмя эффективными полюсами. Выводится ход магнитной проводимости в воздушном зазоре и соответствующая эквивалентная схема магнитного контура машины. Из изменения магнитной энергии получают выражение для электромагнитного момента машины. Далее выводятся выражения для фазовых потокосцеплений и фазовых индуктированных напряжений. Выведенные соотношения экспериментально проверяются на опытной машине. В заключении выведенные выражения модифицируют трансформацией Парка в двухосевую систему и приобретают уравнения, подобные уравнениям синхронного двигателя, при помощи которых потом анализируются переходные явления. Приводятся результаты для исследуемой машины, питаемой двухфазной четырехтактной коммутацией, а именно: временная характеристика тока, роторного угла и числа оборотов при низкой (10 Гц) и высокой (200 Гц) шаговых частотах.

Mathematisches Modell eines Schrittmotors mit axialem Permanentmagnet. Im Artikel wird ein mathematisches Modell eines Zweiphasen-Schrittmotors mit zylindrischem axialen Permanentmagnet auf dem Rotor, mit zwei Statoren und vier effektiven Polen abgeleitet. Abgeleitet wird der Verlauf der magnetischen Leitfähigkeit im Luftspalt und die entsprechende Ersatzschaltung des Magnetkreises der Maschine. Aus der Änderung der magnetischen Energie wird ein Ausdruck für das elektromagnetische Moment der Maschine gewonnen. Ferner werden Ausdrücke für die magnetische Flussverknüpfung und die induzierte Phasenspannung abgeleitet. Die abgeleiteten Beziehungen werden an einer Prüfmaschine experimentell überprüft. Abschließend werden die gewonnenen Ausdrücke mit Hilfe der Parkschen Transformation in ein zweiachsiges System umgewandelt und den Gleichungen eines Synchronmotors ähnliche Gleichungen gewonnen, mit Hilfe derer dann die Übergangserscheinungen analysiert werden. Es werden Ergebnisse für die untersuchte Maschine, die mit einer Zweiphasen-Viertakt-Kommutation gespeist wird, angeführt, und zwar: der Zeitverlauf des Stromes, des Rotorwinkels und der Umdrehungen bei niedriger (10 Hz) und hoher (200 Hz) Schrittfrequenz.

Mathematic Model of a Stepping Motor with an Axial Permanent Magnet. In the paper a mathematic model is derived of a two-phase stepping motor with a cylindrical axial permanent magnet on the rotor, with two stators and four effective poles. The course of magnetic conductivity in the air gap and the corresponding equivalent circuit of the machine are derived. From the change of magnetic energy an expression is obtained for the electromagnetic moment of the machine. Further expressions are derived for phase magnetic linkages and phase induced voltages. The derived expressions are experimentally verified on a test machine. In the conclusion the obtained expressions are modified by the aid of Parks's transformation into the two-axis system and new equations are obtained, similar to equations of a synchronous motor, by which then the transient phenomena are analyzed. Results for the investigated machine, fed by a double-phase, four-stroke commutation, are given, i. e.: the time course of current, rotor angle and revolutions at a low (10 cps) and high (200 cps) stepping frequency.